

高等数学复习资料

我想这些都是好经典的题型，所以很值得参考，(*^__^*)...嘻嘻!!! 不知道高数考完没，希望不会是迟来的资料吧!!

一、填空题

1. 函数 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x + 3}$ 的定义域为_____。
2. 设 $f(x+2) = x^2 + 4x$ ，则 $f(x) =$ _____。
3. 设 $y = \cos x - \arcsin x$ ，则 $y'(0) =$ _____。
4. 设 $y = e^{\cos x} + 2x$ ，则 $y' =$ _____。
5. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} =$ _____。
6. 函数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ 的极小值为_____，极大值为_____。
7. $\int \sin(x+1) dx =$ _____。
8. $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx =$ _____。
9. 设 $z = \ln(x^2 + y^3)$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____。
10. 交换二次积分次序 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy =$ _____。

二、计算题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x^2), & |x| < 1 \\ 1, & |x| \geq 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ \sqrt{1+x}, & x \geq -1 \end{cases}$ ，求 $f(x) + g(x)$ 。
2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$ 。
3. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right]$ 。

4. 求曲线 $y = x \ln x$ 的平行于直线 $2x - y + 3 = 0$ 的切线方程.
5. 求由方程 $e^{x+y} - xy = 0$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的导数.
6. 求 $\int x^2 (e^{x^3} + \sqrt{x}) dx$.
7. 求 $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 1}}$.
8. 求 $\iint_D e^{-x^2} dx dy$, 其中 D 由 $y = 0, y = 2x, x = 1$ 所围成的区域.
9. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.
10. 设 $z = e^{2x} \sin y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

三、应用题

1. 求抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围平面图形的面积.
2. 要作一个底面为长方形的带盖的箱子, 其体积为 72 立方厘米, 其底边成 1: 2 的关系, 问各边的长怎样, 才能使表面积为最小?

四、证明题

证明不等式: $\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$, ($x > 0$).

高等数学复习参考答案

一、填空题

1. $(-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$
2. $x^2 - 4$
3. -1
4. $2 - \sin x e^{\cos x}$

5. e^{-1}
6. $0, 4e^{-2}$
7. $-\cos(x+1)+C$
8. $\frac{1}{4}$
9. $\frac{3y^2}{x^2+y^3}$
10. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y) dx$

二、计算题

$$1. \text{ 解: } f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 1, & x = -1 \\ \ln(1-x^2), & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ \sqrt{1+x}, & -1 < x < 1 \\ \sqrt{1+x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 1+x, & x < -1 \\ 1, & x = -1 \\ \ln(1-x^2) + \sqrt{1+x}, & -1 < x < 1 \\ 1 + \sqrt{1+x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2. \text{ 解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{2}{x^3}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

$$3. \text{ 解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{x^2-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ = \frac{1}{2}$$

$$4. \text{ 解: 设切点坐标为 } M_0(x_0, y_0)$$

$$y'|_{x=x_0} = 1 + \ln x_0$$

直线 $2x - y + 3 = 0$ 的斜率 $k = 2$

$$\therefore 1 + \ln x_0 = 2 \quad \therefore x_0 = e, \quad y_0 = e$$

$$\therefore \text{所求的切线方程为} \quad y = 2x - e$$

5. 解：对方程两边同时求导得 $e^{x+y}(x+y)' - xy' - y = 0$

$$\text{有 } (e^{x+y} - x)y' = y - e^{x+y} \quad \text{得}$$

$$y' = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x}$$

$$6. \text{ 解：原式} = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 + \int x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3} + \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + c$$

$$\begin{aligned} 7. \text{ 解：原式} &= \int_1^{e^2} \frac{d(\ln x + 1)}{\sqrt{\ln x + 1}} \\ &= \left(2\sqrt{\ln x + 1} \right) \Big|_1^{e^2} \\ &= 2\sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \text{ 解：原式} &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} e^{-x^2} dy \\ &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big|_0^{2x} dx = 2 \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\ &= - \int_0^1 e^{-x^2} d(-x^2) \\ &= -e^{-x^2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \text{ 解: } \int_0^2 f(x-1) dx &= \int_{-1}^1 f(u) du \\
&= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^u} du + \int_0^1 \frac{1}{1+u} du \\
&= \int_{-1}^0 \left[1 - \frac{e^u}{1+e^u} \right] du + \ln(1+u) \Big|_0^1 \\
&= \left[u - \ln(1+e^u) \right]_{-1}^0 + \ln 2 \\
&= 1 + \ln(1+e^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \text{ 解: } \frac{\partial z}{\partial x} &= 2e^{2x} \sin y \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= e^{2x} \cos y
\end{aligned}$$

三、应用题

1. 解: 曲线交点为 (2,-2) 和 (8,4)

所围区域为 $\frac{1}{2}y^2 \leq x \leq y+4, -2 \leq y \leq 4$ 故面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^4 \left(y+4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\
&= \left(\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3 \right) \Big|_{-2}^4 \\
&= 18
\end{aligned}$$

2. 解: 设一条底的底边为 x , 则另一条底边为 $2x$, 又设箱子高为 h ,

$$\text{则由 } 2x^2h = 72 \quad \text{得 } h = \frac{36}{x^2} \quad \therefore$$

$$\text{表面积 } S = 4x^2 + \frac{216}{x} \quad (0 < x < +\infty)$$

$$S' = 8x - \frac{216}{x^2} = \frac{8}{x^2}(x^3 - 27)$$

令 $S' = 0$ 得唯一驻点 $x = 3$

由 $S''|_{x=3} = \left[8 + \frac{436}{x^3} \right]_{x=3} > 0$

可知当 $x = 3$ 时, 表面积 S 最小, 即底边为 3 cm, 6cm, 高为 4cm 时, 表面积最小。

四、证明题 (共 6 分)

证明 令 $f(x) = \sin x + \cos x - 1 - x + x^2$, 那么 $f(0) = 0$.

要证 $\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$ ($x > 0$), 只需要证 $f(x) > 0$ ($x > 0$).

根据计算知道 $f'(x) = \cos x - \sin x - 1 + 2x$,

$$f'(0) = 0$$

和 $f''(x) = -\sin x - \cos x + 2$.

因为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 不同时等于 1, 得到 $f''(x) > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 结果有 $f(x) > 0$ ($x > 0$).

整理: Rock.Z

